

Learning signal processing in Persian language

Step 8: Stockwel Transform (S-Transform)

سالانز جواهریان

دانشآموخته کارشناسی ارشد مهندسی پزشکی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

تبدیل S در اصل همان STFT با پنجره گوسی است (تبدیل گابور) که بهمنای پنجره ی گوسی اش در تمام باند های فرکانسی ثابت نبوده و با توجه به باند مورد بررسی، بهمنای خود را تغییر میدهد.

با جای گذاری معکوس اندازه فرکانس بجای انحراف معیار در تبدیل گابور میتوانیم به پنجره ی مورد استفاده در تبدیل S دست پیدا کنیم.

رابطه ی ارائه شده برای تجزیه طیفی به روش تبدیل S به صورت زیر میباشد:

$$\begin{aligned} ST(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt \\ ST(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f^2(\tau-t)}{2}} e^{-i2\pi ft} dt \end{aligned}$$

در حقیقت فرق بین تبدیل S و تبدیل گابور در تعیین انحراف معیار است که در تبدیل S مقدار آن به صورت متغیر با فرکانس بوده ولی در تبدیل گابور به صورت ثابت انتخاب میشود؛ بدین صورت تبدیل S دارای یک حالت MRA میشود.

انحراف معیار تبدیل S به صورت زیر میباشد:

$$\delta(f) = \frac{1}{|f|}$$

با توجه به اصل عدم قطعیت هایستبرگ، میتوان رزولوشن فرکانسی را توان با رزولوشن زمانی بالا برد و باید یکی را فدای دیگری کرد؛ بعلاوه از قبل میدانیم که پهنانی تابع گوسی متناسب با انحراف معیار تعیین میشود، همچنین دو سر تابع گوسی هیچگاه به صفر نمیرسد و تا بی نهایت ادامه دارند.

با توجه به گفته های بالا در مورد تابع گوسی میتوانیم دامنه پنجره‌ی انتخابی را بی نهایت و انحراف معیار آنرا $\left| \frac{1}{f} \right|$ در نظر بگیریم، بدین صورت فرکانس های بالا را با پنجره‌ی نازک تری نسبت به فرکانس پایین بررسی میکنیم.

فرق بین تبدیل گابور و تبدیل S در اندازه‌ی پنجره‌ی مورد بررسی است؛ در تبدیل گابور طول پنجره ثابت می‌بود ولی در اینجا دیدیم که با توجه به فرکانس تغییر میکند.

برای مثال، در فرکانس $HZ = 10$ پهنانی پنجره گوسی ما 0.1 و در فرکانس $HZ = 1000$ ، پهنانی پنجره ما 0.001 خواهد بود، اما در تبدیل گابور هم برای فرکانس $10HZ$ و هم برای فرکانس $100HZ$ ، اندازه‌ی پنجره ثابت در نظر گرفته میشود که با توجه به نوع کاربرد اندازه‌ی پنجره را تعیین میکنیم.

در تبدیل S مشاهده می‌شود که رزولیشن زمانی در محدوده فرکانس های بالای سیکنال بیشتر از فرکانس های پایین است؛ همچنین رزولیشن فرکانسی در فرکانس های پایین سیکنال بیشتر از فرکانس های بالا است (MRA). رابطه‌ی تبدیل S را میتوان با STFT به صورت زیر تعریف کرد:

$$STFT(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$w(t) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} \quad \delta(f) = \frac{1}{|f|}$$

$$w(t, f) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2 f^2}{2}}$$

$$ST(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f^2(\tau-t)}{2}} e^{-i2\pi ft} dt$$

اگر رابطه‌ی حاصل شده از تعریف STFT برای تبدیل S را با رابطه‌ی ویولت یعنی:

$$W(\tau, d) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t - \tau, d) dt$$

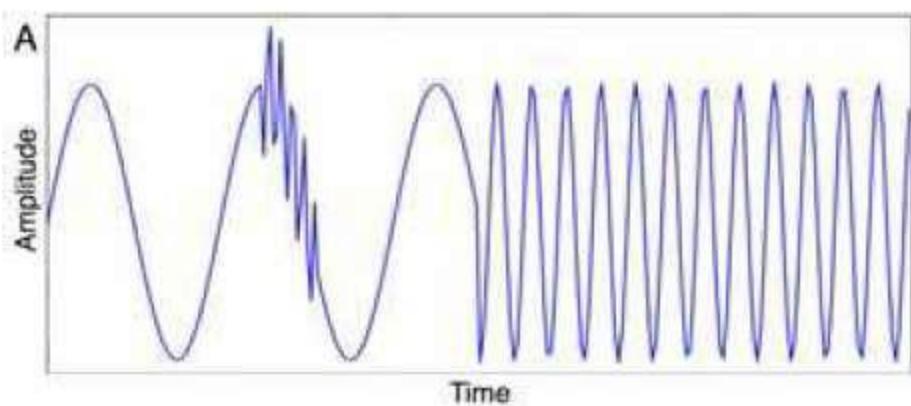
مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که می‌توانیم رابطه زیر را:

$$w(t, f) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2 f^2}{2}} e^{-i2\pi ft}$$

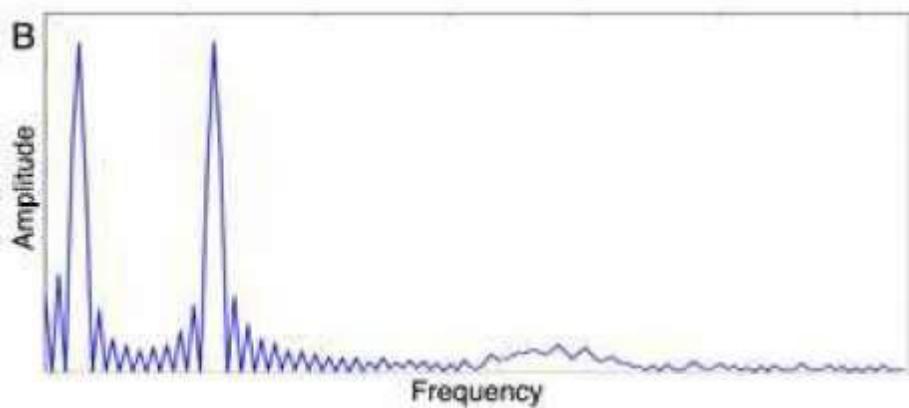
به عنوان تابع ویولت مادر در نظر گرفته و شباهت سیگنال را نسبت به این تابع حساب کنیم.

در حقیقت میتوان تبدیل S را یک تبدیل ویولت با تابع مادر Meyer در نظر گرفت که در آن فاز سیگنال هم محاسبه شده است، یعنی مولفه‌ی e نیز در آن حضور دارد.

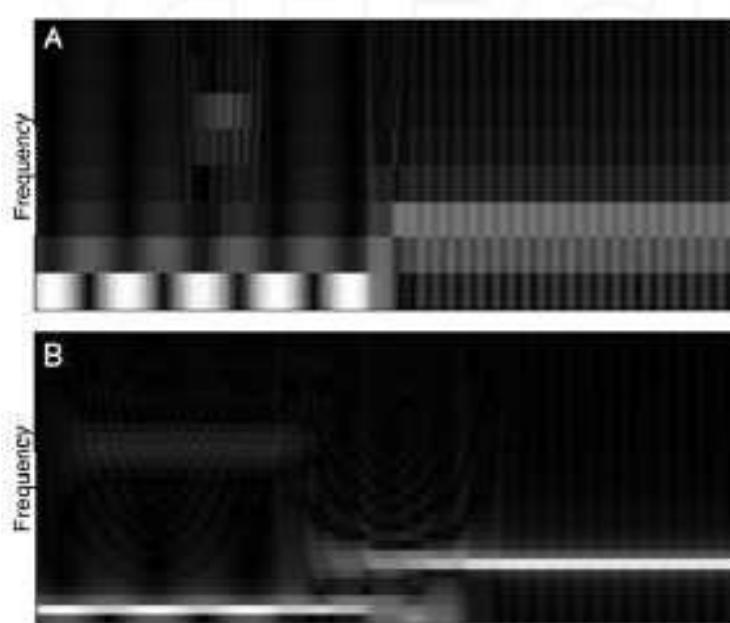
در ادامه یک سیگنال دلخواه با سه فرکانس متفاوت را در نظر میگیریم.



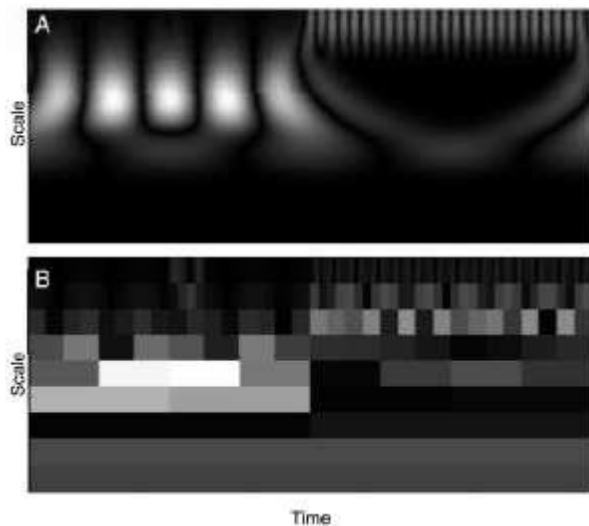
حال هر یک از تبدیلات فوریه و STFT و ویولت و S-transform را بر روی ای سیگنال اعمال کده و نتایج را میبینیم. (تمامی شکل ها از مقالات برداشته شده است)



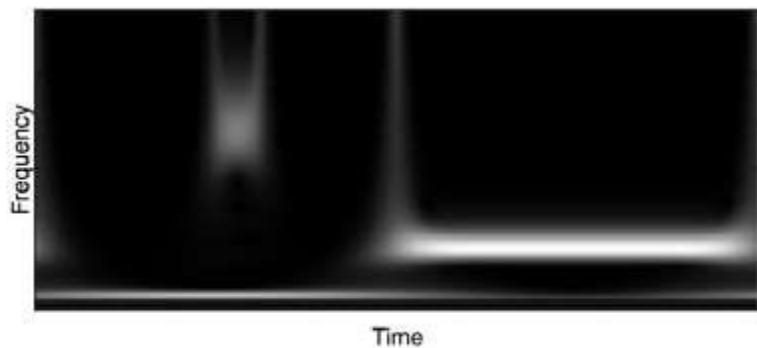
تبدیل فوریه سیگنال



تبدیل STFT با پنجه‌ی بزرگتر در شکل بالا و پنجه‌ی کوچکتر در شکل پایین



تبديل ویولت با دو تابع مادر ، اولی کلاه مکزیکی ، دومی هار



شکل حاصل از S-TRANSFORM

References

1. Akbari, H., M.T. Sadiq, and A.U. Rehman, Classification of normal and depressed EEG signals based on centered correntropy of rhythms in empirical wavelet transform domain. *Health Information Science and Systems*, 2021. 9(1): p. 1-15.
2. Akbari, H. and M.T. Sadiq, Classification of Seizure and Seizure Free EEG Signals Based on second-order difference plot of DWT coefficients. 2020.
3. Akbari, H., Classification of Seizure and Seizure Free EEG Signals using Geometrical features derived from Poincaré plot, and binary particle swarm optimization.

4. Akbari, H., S.S. Esmaili, and S.F. Zadeh, Classification of seizure and seizure-free EEG signals based on empirical wavelet transform and phase space reconstruction. *arXiv preprint arXiv:1903.09728*, 2019.
5. Ghofrani, S. and H. Akbari. Comparing nonlinear features extracted in EEMD for discriminating focal and non-focal EEG signals. in *Tenth International Conference on Signal Processing Systems*. 2019. International Society for Optics and Photonics.
6. Akbari, H. and M.T. Sadiq, Detection of focal and non-focal EEG signals using non-linear features derived from empirical wavelet transform rhythms. *Physical and Engineering Sciences in Medicine*: p. 1-15.
7. Akbari, H., S. Saraf Esmaili, and S. Farzollah Zadeh, Detection of Seizure EEG Signals Based on Reconstructed Phase Space of Rhythms in EWT Domain and Genetic Algorithm. *Signal Processing and Renewable Energy*, 2020. 4(2): p. 23-36.
8. Akbari, H. and S. Ghofrani, Fast and accurate classification f and nf EEG by using sdp and EWT. *International Journal of Image, Graphics and Signal Processing (IJIGSP)*, 2019. 11(11): p. 29-35.
9. Hussain, W., et al., Epileptic seizure detection using 1 D-convolutional long short-term memory neural networks. *Applied Acoustics*, 2021. 177: p. 107941.
10. Sadiq, M.T., X. Yu, and Z. Yuan, Exploiting dimensionality reduction and neural network techniques for the development of expert brain–computer interfaces. *Expert Systems with Applications*. 164: p. 114031.
11. Sadiq, M.T., et al., Identification of Motor and Mental Imagery EEG in Two and Multiclass Subject-Dependent Tasks Using Successive Decomposition Index. *Sensors*, 2020. 20(18): p. 5283.
12. Sadiq, M.T., et al., A Matrix Determinant Feature Extraction Approach for Decoding Motor and Mental Imagery EEG in Subject Specific Tasks. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*, 2020.
13. Sadiq, M.T., et al., Motor imagery BCI classification based on novel two-dimensional modelling in empirical wavelet transform. *Electronics Letters*, 2020.
14. Sadiq, M.T., et al., Motor imagery EEG signals classification based on mode amplitude and frequency components using empirical wavelet transform. *IEEE Access*, 2019. 7: p. 127678-127692.
15. Sadiq, M.T., et al., Motor Imagery EEG Signals Decoding by Multivariate Empirical Wavelet Transform-Based Framework for Robust Brain–Computer Interfaces. *IEEE Access*, 2019. 7: p. 171431-171451.
16. Arianpour, Y., S. Ghofrani, and H. Amindavar. Locally nonlinear regression based on kernel for pose-invariant face recognition. in *2012 11th International Conference on Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA)*. 2012. IEEE.
17. Sharma, M. and U.R. Acharya, Automated detection of schizophrenia using optimal wavelet-based L_1 norm features extracted from single-channel EEG. *Cognitive Neurodynamics*, 2021: p. 1-14.
18. Sharma, M., et al., An automated diagnosis of depression using three-channel bandwidth-duration localized wavelet filter bank with EEG signals. *Cognitive Systems Research*, 2018. 52: p. 508-520.

19. Sharma, M., et al., An automatic detection of focal EEG signals using new class of time–frequency localized orthogonal wavelet filter banks. *Knowledge-Based Systems*, 2017. 118: p. 217-227.
20. Sharma, M., et al., Dual-tree complex wavelet transform-based features for automated alcoholism identification. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2018. 20(4): p. 1297-1308.
21. Sharma, M., R.B. Pachori, and U.R. Acharya, A new approach to characterize epileptic seizures using analytic time-frequency flexible wavelet transform and fractal dimension. *Pattern Recognition Letters*, 2017. 94: p. 172-179.
22. Sharma, M. and R.B. Pachori, A novel approach to detect epileptic seizures using a combination of tunable-Q wavelet transform and fractal dimension. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2017. 17(07): p. 1740003.
23. Sharma, M., D. Deb, and U.R. Acharya, A novel three-band orthogonal wavelet filter bank method for an automated identification of alcoholic EEG signals. *Applied Intelligence*, 2018. 48(5): p. 1368-1378.